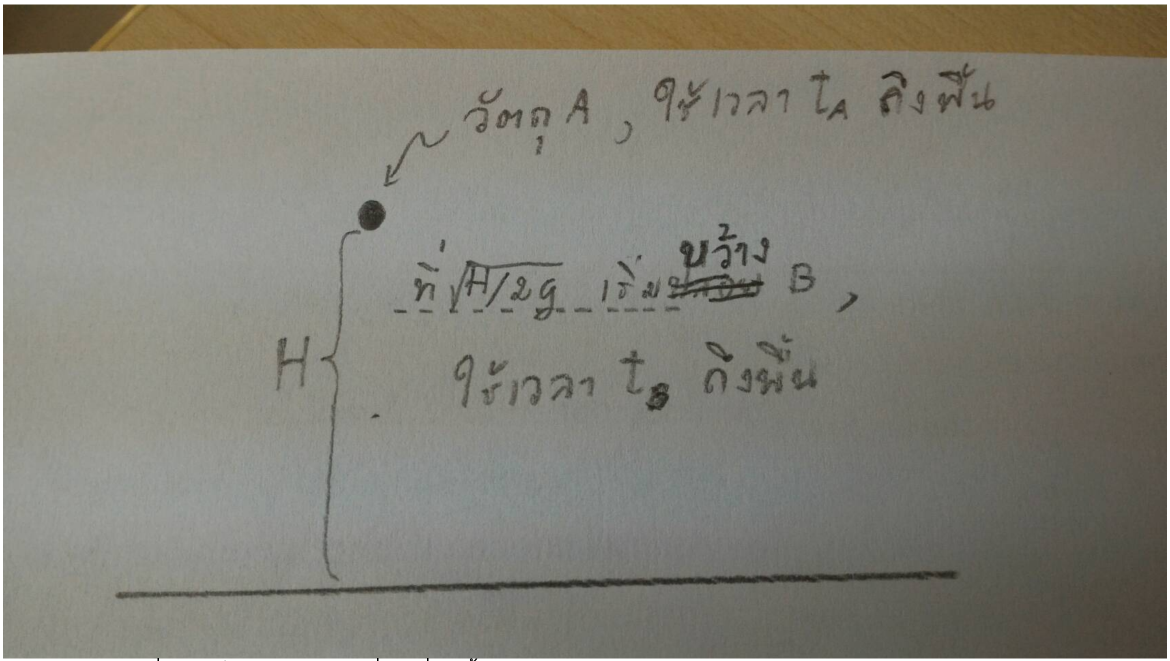
เฉลยชุดข้อสอบ : จลศาสตร์ในหนึ่งมิติและสองมิติ ชุดที่ 2

ข้อที่ 1

ตอบ $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2gH}{3}}$



(จากรูป)เวลาที่วัตถุ A ใช้ในการเคลื่อนที่ถึงพื้นหาได้จาก

$$H = 0 + \frac{1}{2}g(t_A)^2$$
$$t_A = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

หลังจากที่เวลาผ่านไป $\sqrt{\frac{H}{2g}}$ เริ่มขว้าง B และใช้เวลา t_B เคลื่อนที่จนถึงพื้นพร้อม A ดังนั้นเขียนสมการได้ว่า

$$\sqrt{\frac{H}{2g}} + t_B = t_A$$
$$t_B = t_A - \sqrt{\frac{H}{2g}}$$
$$= \sqrt{\frac{3H}{2g}}$$

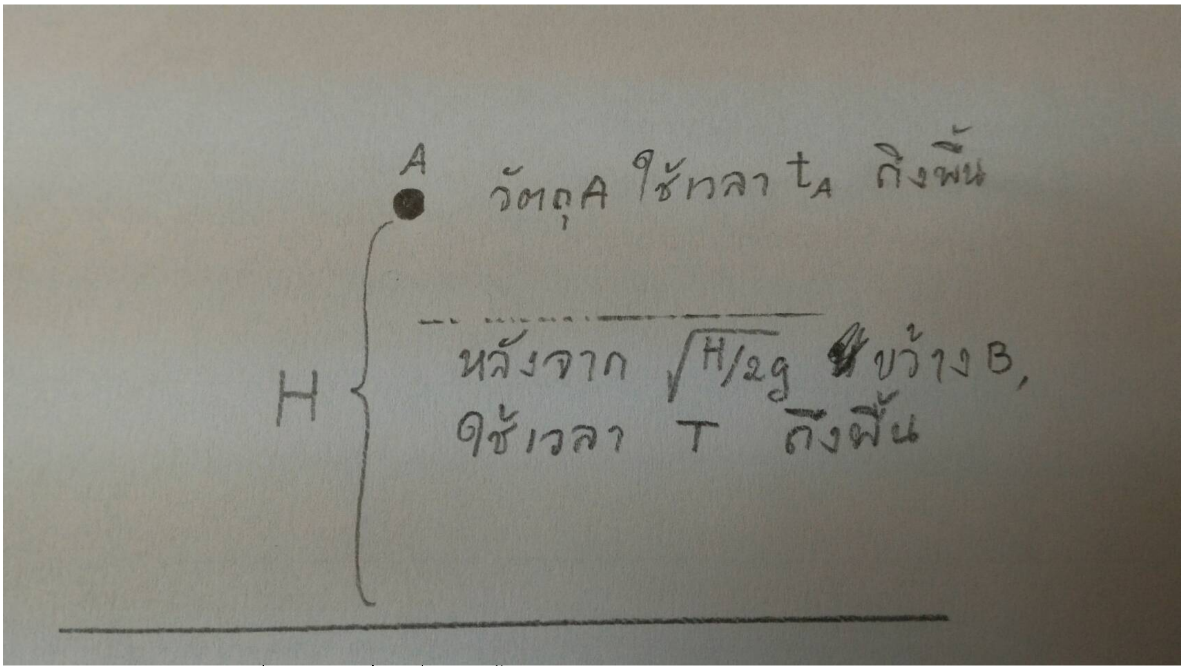
หลังจากเวลา $\sqrt{\frac{H}{2g}}$ ขว้าง B ตามลงไปด้วยอัตราเร็วต้น u_B และสามารถหาอัตราเร็วของ B ได้จาก

$$H = u_B \cdot t_B + \frac{1}{2}g(t_B)^2$$

$$H = u_B \cdot \sqrt{\frac{3H}{2g}} + \frac{1}{2}g\frac{3H}{2g}$$

$$u_B = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2gH}{3}}$$

ตอบ $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2gH}{3}}$



กำหนดให้ t_A เป็นเวลาที่ A ใช้เคลื่อนที่จนถึงพื้น มีค่าเท่ากับ

$$t_A = \sqrt{\frac{H}{2g}} + T$$

สามารถหา T จากการเคลื่อนที่ของ B ด้วยอัตราเร็ว v_B

$$H = u_B \cdot T + \frac{1}{2}gT^2$$

$$0 = T^2 + \sqrt{\frac{2H}{g}}T - \frac{3H}{2g}$$

$$T = +\sqrt{\frac{3H}{2g}}$$

<u>หมายเหตุ</u> เลือกค่าเวลาเป็นบวก

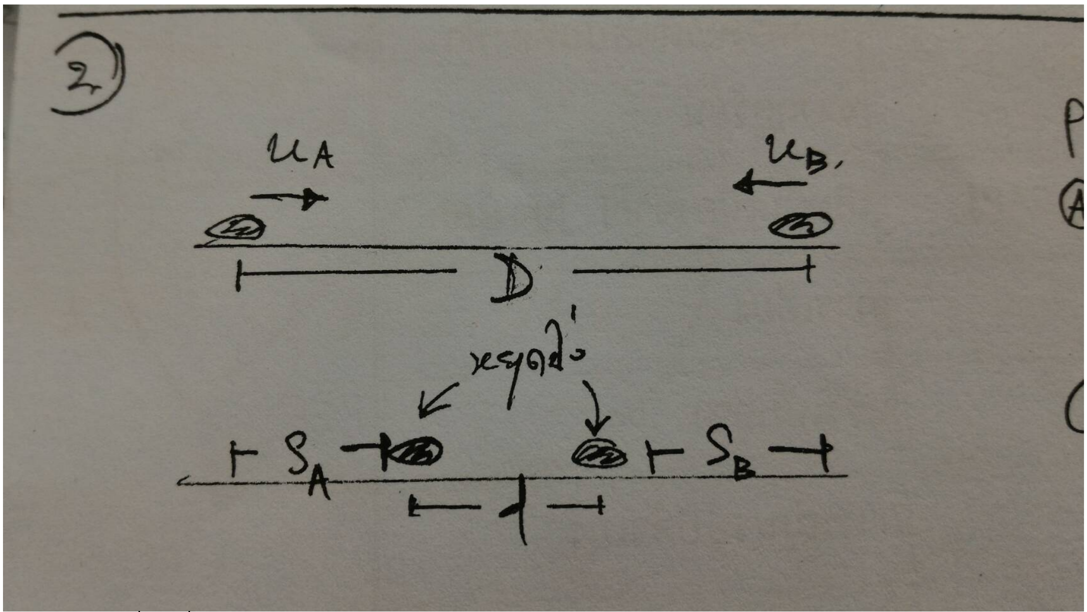
ดังนั้น สามารถหาอัตราเร็วของ B ได้จาก

$$H = u_B \cdot \sqrt{\frac{3H}{2g}} + \frac{1}{2} g \frac{3H}{2g}$$
$$\therefore \quad u_B = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2gH}{3}}$$

ข้อที่ 2

ตอบ $2.1)\ \dfrac{a_B}{a_A} = \dfrac{u_B}{u_A}$

$2.2)\ a_A = \dfrac{u_A}{2\left(D-d\right)}\left(u_A + u_B\right)$



รถไฟ A เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว u_A ในช่วงเวลา t ด้วยอัตราเร่ง $-a_A$

$$u_A = -a_A t$$

รถไฟ B เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว u_B (เวลาช่วงเดียวกันกับที่รถไฟ A ใช้)ด้วยอัตราเร่ง $-a_B$

$$u_B = -a_B t$$

$$\therefore \quad \frac{a_B}{a_A} = \frac{u_B}{u_A}$$

จากรูป ถ้ารถไฟ A เคลื่อนที่ได้ระยะทาง S_A ในช่วงเวลา t ด้วยอัตราเร็วต้น u_A ส่วนรถไฟ B เคลื่อนที่ได้ระยะทาง S_B ในช่วงเวลา t ด้วยอัตราเร็วต้น u_B สามารถเขียนสมการบรรยายการเคลื่อนที่ของรถไฟทั้งสองได้ว่า

$$D = S_A + S_B + d \tag{1}$$
$$D - d = \left(u_A t - \frac{1}{2} a_A t^2\right) + \left(u_B t - \frac{1}{2} a_B t^2\right) \tag{2}$$

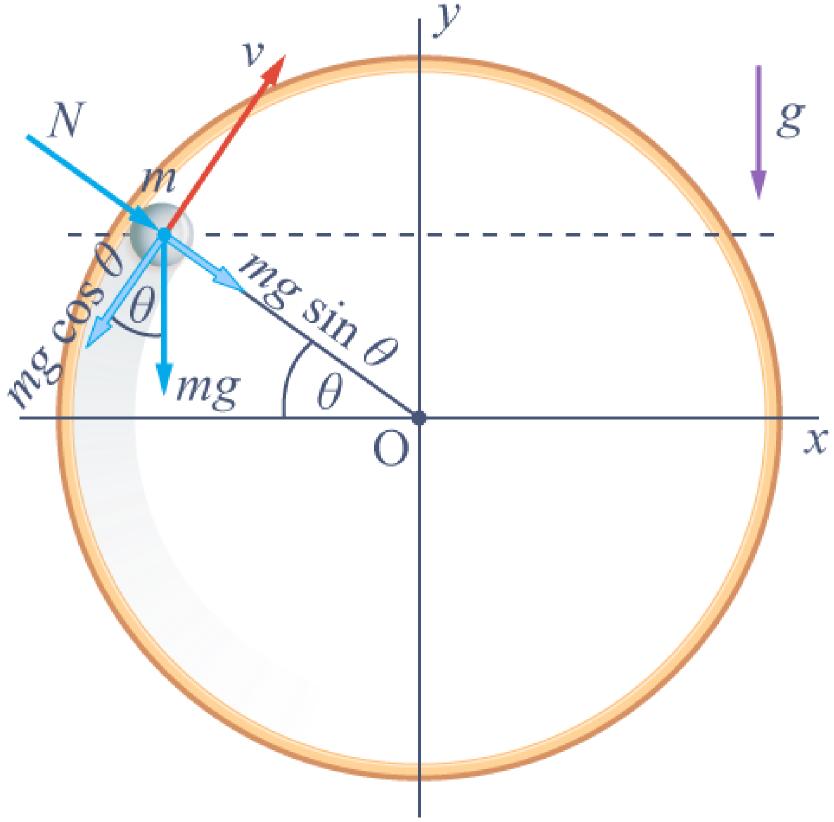
แทนค่าเวลา $t = \dfrac{u_A}{a_A} = \dfrac{u_B}{a_B}$ และ $a_B = \dfrac{u_B}{u_A} a_A$ ลงในสมการที่ (2) จะได้

$$D-d=\frac{1}{2}\frac{u_A}{a_A}(u_A+u_B)$$
$$\therefore\quad a_A=\frac{u_A\,(u_A+u_B)}{2\,(D-d)}$$

ข้อที่ 3

ตอบ $2R\sin^2\theta\cos\theta$

ในการคำนวณข้อนี้มี 2 ขั้นตอน
หาความเร็วที่ m เริ่มหลุดจากรางที่ A (เคลื่อนที่แบบวงกลม)



จาก Newton′s 2nd law สามารถเขียนสมการการเคลื่อนที่ ณ ตำแหน่งเหนือเส้น $O\bar{X}$ ก่อนที่มวล m จะหลุดจากรางได้ว่า

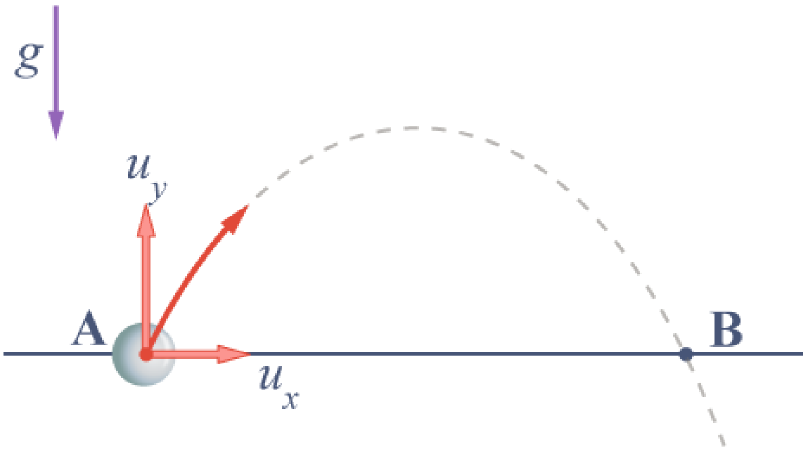
$$m\frac{v^2}{R}=mg\sin\theta+N$$

เมื่อมวล m หลุดจากราง ; $N=0$ ดังนั้น

$$v=\sqrt{Rg\sin\theta}$$

เป็น ความเร็ว v ที่หลุดจากขอบราง และดังนั้นมวล m จึงเคลื่อนที่ต่อในลักษณะของ projectile motion ซึ่งสามารถหาความเร็วในแต่ละแนวแกนได้ดังนี้

$$v_x=v\sin\theta,\quad v_y=v\cos\theta$$



ระยะ $AB = v_x t$ (เวลาจาก $(A \to B)$
โดยหาเวลาจากการกระจัดในแนวดิ่ง (จาก$A \quad \to B$) เป็นศูนย์
จาก

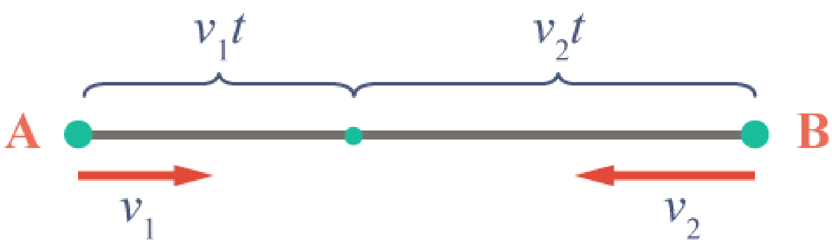
$$S_y = u_y t + \frac{1}{2} a_y t^2$$
$$0 = u_y t - \frac{1}{2} g t^2$$
$$t = 2u_y/g$$

ดังนั้นระยะ AB จึงมีค่าเท่ากับ

$$u_x t = \sqrt{Rg\sin\theta}\sin\theta \times 2\frac{\sqrt{Rg\sin\theta}\cos\theta}{g}$$
$$= 2R\sin^2\theta\cos\theta$$

ข้อที่ 4

ตอบ ทั้งคู่จะชนกันเมื่อ A เคลื่อนที่ได้ระยะทาง $\frac{v_1}{v_1+v_2}d$

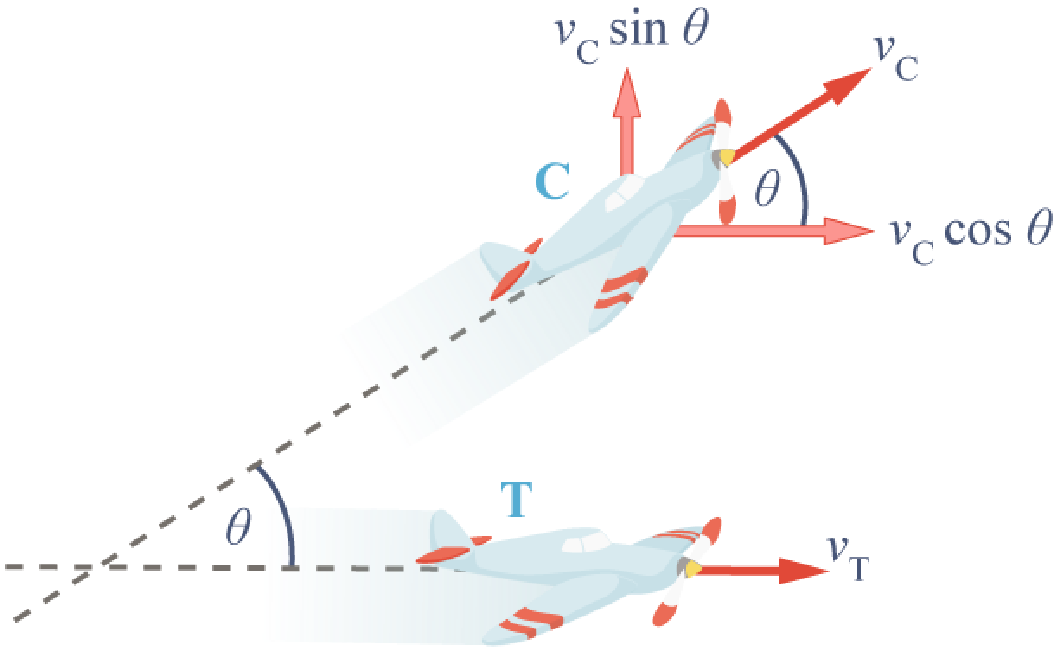


เวลาที่คนทั้งสองใช้วิ่งมาเจอกันจะมีค่าเท่ากัน ดังนั้น

$$v_1 t + v_2 t = d$$
$$t = \mathrm{d}/(\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2)$$
$$\therefore \text{ ระยะที่ } A \text{ วิ่ง} = v_1 t = \frac{v_1}{v_1+v_2}d$$

ข้อที่ 5

ตอบ $\sqrt{v_c^2 + v_T^2 - 2v_C v_T cos\theta}$



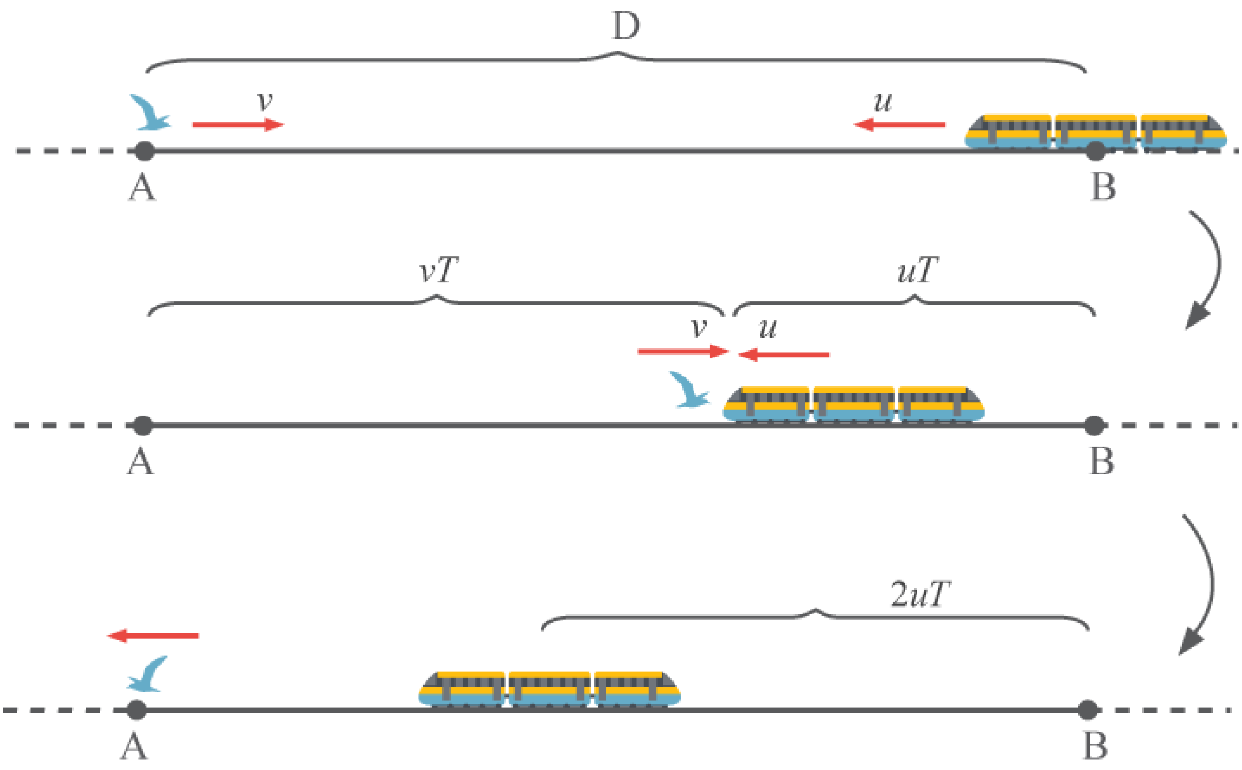
ความเร็วแนวระดับของ C ในแนวเดียวกับ T เมื่อสังเกตุโดย $\mathrm{T} = v_c \cos\theta - v_T$
ความเร็วแนวดิ่งของ C ในแนวตั้งฉากกับแนวการเคลื่อนที่ของ T เมื่อสังเกตุโดย $\mathrm{T} = v_c \sin\theta$

ดังนั้น ความเร็วที่ C หนีห่างจาก T

$$= \sqrt{(v_c \cos\theta - v_T)^2 + (v_c \sin\theta)^2}$$
$$= \sqrt{v_C^2 + v_T^2 - 2v_C v_T \cos\theta}$$

ข้อที่ 6

ตอบ $\left(\frac{2u}{u+v}\right)D$



จากรูปแสดงตำแหน่งนกและรถไฟที่เวลาต่าง ๆ กัน เมื่อเวลาผ่านไป T นกกับรถไฟเจอกันครั้งแรก เขียนสมการได้ว่า

$$S_{\text{นก}} + S_{\text{รถไฟ}} = D$$

$$vT + uT = D$$

$$T = \frac{D}{v+u}$$

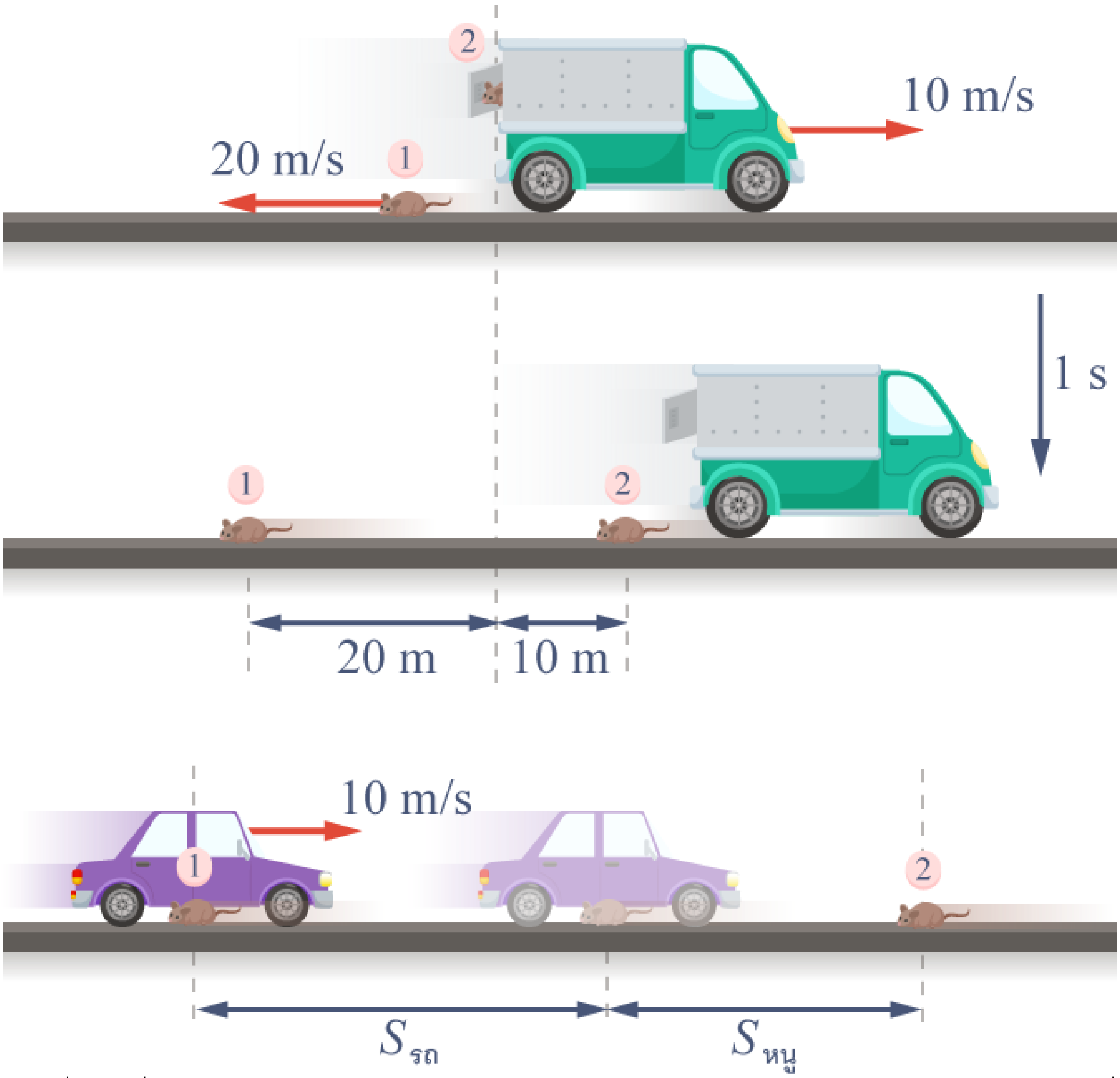
นกจะใช้เวลาในการกลับไปถึง $A = T$ (เท่าขามา)
$\therefore$ ขณะนกบินถึง A , รถไฟอยู่ห่างจาก B

$$= u \cdot T + u \cdot T = \frac{2u}{u+v} D$$

ข้อที่ 7

ตอบ 80 ตัว

จริง ๆ ข้อนี้เรามีวิธีคิดง่าย ๆ คือ หา "ช่วงเวลา" ที่เว้นระยะการจับหนูแต่ละตัว ซึ่งก็หาได้หากรู้ "ระยะห่าง" ระหว่างหนูแต่ละตัว ซึ่งหาได้จากอัตราเร็วของรถจอมตลก อัตราเร็วของหนูและความถี่ในการปล่อยหนู



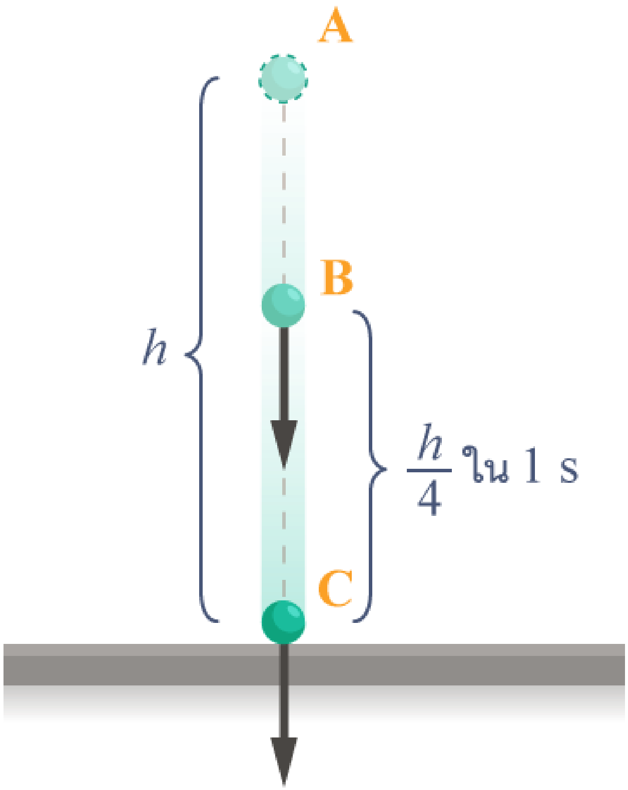
จากรูป ขณะที่หนูตัวที่ 1 ถูกปล่อยออกมาทันที มันมีความเร็ว $20\,\mathrm{m/s}$ และรถมีความเร็ว $10\,\mathrm{m/s}$ ในทิศตรงข้ามกัน เมื่อผ่านไป $1\,\mathrm{s}$ หนูตัวที่ 2 จึงถูกปล่อยออกมา ณ ขณะนั้น หนูตัวที่ 1 และ 2 อยู่ห่างกัน $20+10=30\,\mathrm{m}$ พอดี
หลังจากรถค้างคาวจับหนูตัวที่ 1 แล้ว จะอยู่ห่างจากหนูตัวที่ 2 $30\,\mathrm{m}$ ซึ่งทั้งรถและหนูจะวิ่งเข้าหากัน ในทั้ง 2 เจอกันภายในเวลา t ได้

$$\begin{aligned} S_{\text{รถ}} + S_{\text{หนู}} &= 30 \\ 20t + 20t &= 30 \\ t &= 0.75\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

$\therefore$ ใน 1 นาที จะจับหนูได้ $60\,\mathrm{s}/(0.75\,\mathrm{s}) = 80$ ตัว

ข้อที่ 8

ตอบ $4+2\sqrt{3}$



กำหนดให้ t เป็นเวลาที่วัตถุใช้ในการเคลื่อนที่เป็นระยะ h ดังนั้น

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

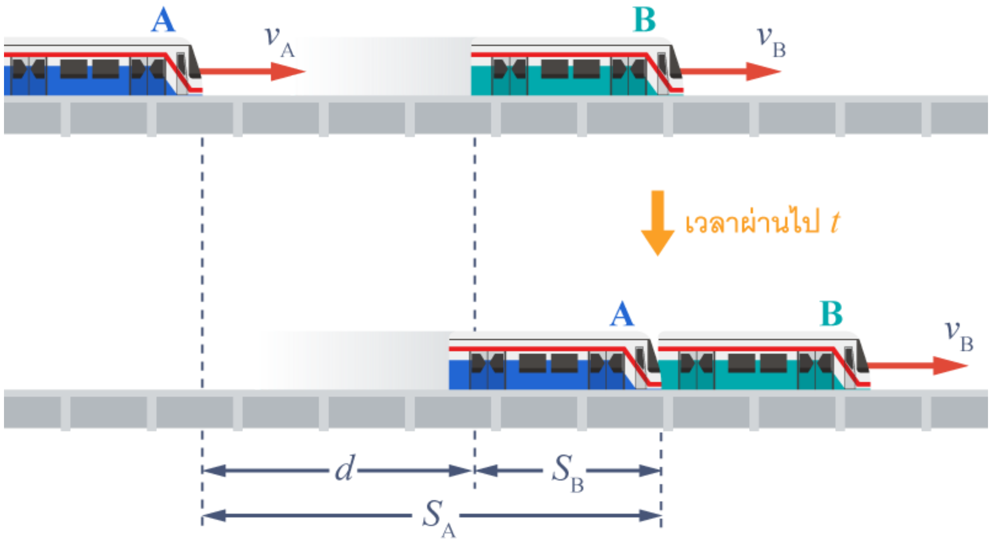
โจทย์ กำหนดว่า 1 วินาทีสุดท้ายวัตถุเคลื่อนที่ได้ระยะทาง $\frac{1}{4}h$ ดังนั้น วัตถุใช้เวลา $t-1$ เคลื่อนที่จากหยุดนิ่งลงมาเป็นระยะ $\frac{3}{4}h$ เขียนสมการได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}h &= \frac{1}{2}g(t-1)^2 \\ \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}gt^2 &= \frac{1}{2}g\left(t^2+1-2t\right) \\ t^2-8t+4 &= 0 \\ t &= 4\pm 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

เลือกค่าบวก เป็นเวลาที่วัตถุใช้ทั้งหมดก่อนตกถึงพื้น

ข้อที่ 9

ตอบ $a = \dfrac{(v_A - v_B)^2}{2d}$



ในข้อนี้ รถ A จะวิ่งตามไปทันท้ายรถ B พอดีแล้ว "ไม่ชน" เมื่อ A เร็วเท่า B พอดี ในที่นี้ A จะวิ่งได้การกระจัดมากกว่า B อยู่ d
ได้

$$
\begin{aligned}
S_A &= d + S_B \\
v_A t - \frac{1}{2}at^2 &= d + v_B t \qquad (1)
\end{aligned}
$$

A วิ่งด้วยความเร็วต้น v_A ไปทัน B พอดีด้วยความเร็ว v_B โดยใช้เวลา t

$$
\begin{aligned}
v_A \text{ (ที่เวลา} t) &= v_B \\
v_A - at &= v_B \qquad (2)
\end{aligned}
$$

แก้สมการที่ 1 และ 2 โดย

$$
\begin{gathered}
t = \frac{v_A + v_B}{a}; \\
(v_A - v_B)\left(\frac{v_A - v_B}{a}\right) - \frac{1}{2}a\left(\frac{v_A - v_B}{a}\right) = d
\end{gathered}
$$

∴ ความหน่วง

$$
a = \frac{(v_A - v_B)^2}{2d}
$$

<u>อีกวิธี</u> คือให้ B อยู่นิ่ง (B เป็นผู้สังเกต) จะเห็น A วิ่งเข้ามาด้วยความเร็วต้น $v_A - v_B$ เข้าหาตัวเอง และหยุดในระยะ d จะได้

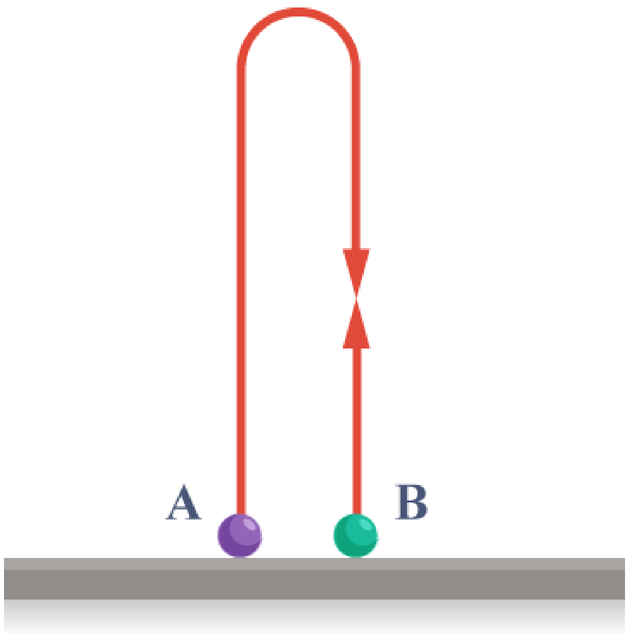
$$
v^2 = u^2 + 2as
$$

แทนค่าแล้วจะได้

$$
\begin{aligned}
0 &= (v_A - v_B)^2 + 2(-a)d \\
a &= \frac{(v_A - v_B)^2}{2d}
\end{aligned}
$$

ข้อที่ 10

ตอบ $\frac{u^2}{2g}$



ปัญหาข้อนี้ โจทย์สนใจตำแหน่งที่วัตถุทั้งสองชนกัน ดังนั้น

พิจารณา A ที่เวลา $t+\frac{u}{g}$ เคลื่อนที่ได้ระยะทาง S_A จากความเร็วต้น u เขียนเป็นสมาการได้เป็น

$$S_A = u(t+\frac{u}{g}) - \frac{1}{2}g(t+\frac{c}{u})^2 \tag{1}$$

พิจารณา B เคลื่อนที่ด้วยความเร็วต้น u ได้ระยะทาง S_B ใช้เวลา t เขียนเป็นสมการได้เป็น

$$S_B = ut - \frac{1}{2}gt^2 \tag{2}$$

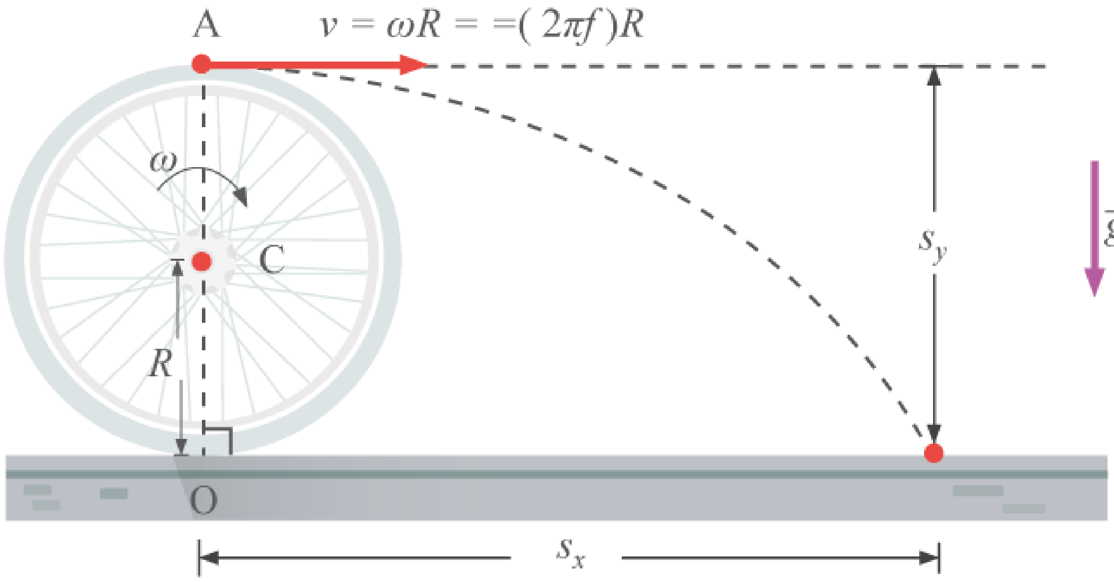
ที่ เวลา $t+\frac{u}{g}$ นี้ วัตถุทั้งสองชนกัน นั่นคือวัตถุทั้งสองเคลื่อนที่ได้ระยะทางเท่ากัน $(S_A = S_B)$ ดังนั้นเขียนสมการ $(1)\&(2)$ ใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} u(t+\frac{u}{g}) - \frac{1}{2}g(t+\frac{c}{u})^2 &= ut - \frac{1}{2}gt^2 \\ t &= \frac{u}{2g} \\ \therefore \quad S_B &= u \cdot \frac{u}{2g} \end{aligned}$$

เป็นความสูงของวัตถุทั้งสองตอนชนกัน

ข้อที่ 11

ตอบ $4\pi f\sqrt{\frac{R^3}{g}}$



การหมุนของล้อ ความเร็วที่จุด A จะมีค่าเท่ากับ ωR เมื่อ ω เป็นอัตราเร็วเชิงมุม เขียนในรูป $\omega = 2\pi f$ ได้ เมื่อ f คือ ความถี่ของการหมุน
ดังนั้น ความเร็วต้น $2\pi fR$ นี้จะเป็นความเร็วต้นของ projectile ในแนวระดับ u_x :
หาเวลาที่ projectile อยู่ในอากาศจาก

$$\overbrace{S_y}^{2R} = \overbrace{u_y}^{o} t \frac{1}{2} \overbrace{a_y}^{g} t^2$$

$$\therefore \quad t = \sqrt{\frac{4R}{g}}$$

ด้วยเวลา t นี้ projectile จะวิ่งไปในแนวระดับได้ระยะทาง

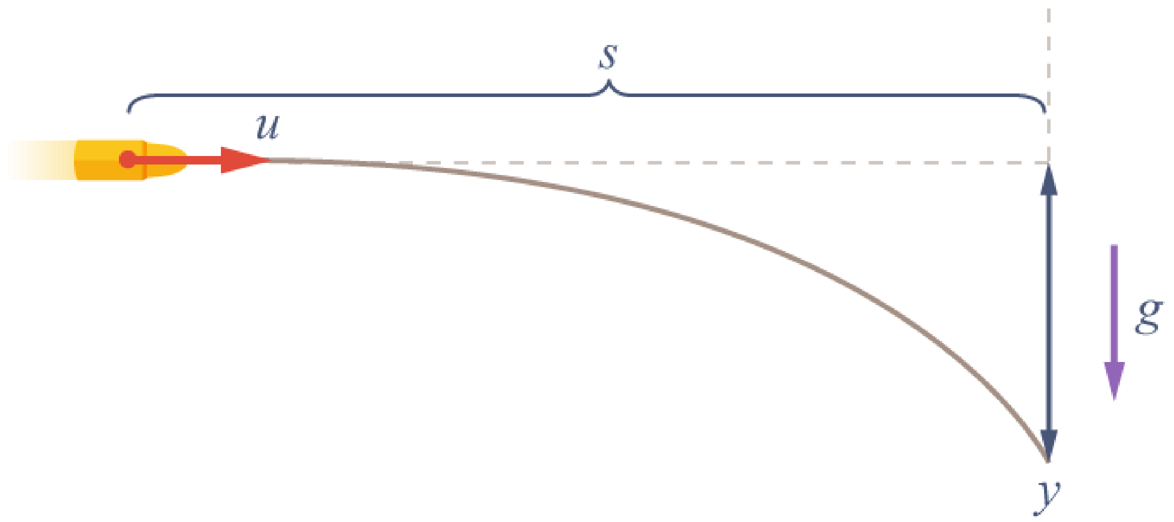
$$S_x = u_x t = (2\pi Rf)\sqrt{\frac{4R}{g}}$$

$\therefore$ projectile จะตกกระทบพื้นห่างจากจุด O เป็นระยะทาง

$$S_x = 4\pi f\sqrt{\frac{R^3}{g}}$$

ข้อที่ 12

ตอบ $20\,\mathrm{mm}$



projectile จะวิ่งเป็นเส้นโค้งดังรูป โดยมีความเร็วในแนวระดับคงที่ เวลาที่กระสุนปืนใช้หาจากการเคลื่อนที่ตามแนวดิ่งเป็นระยะ 5 mm จากความสัมพันธ์

$$S = ut + \frac{1}{2}at^2$$
$$5\text{ mm} = 0 + \frac{1}{2}gt^2$$
$$t = \sqrt{\frac{10\text{ mm}}{g}}$$

ดังนั้นความเร็วในแนวระดับจะมีค่าเท่ากับ

$$v_x = (25\text{ m})\sqrt{\frac{\text{g}}{10\text{ mm}}}$$

ต่อไปหาเวลาที่กระสุนใช้ในการเคลื่อนที่เป็นระยะทาง 50 m

$$t = (50\text{ m}) \cdot \frac{\sqrt{10\text{ mm}}}{(25\text{ m}\sqrt{\text{g}})} = 2\sqrt{\frac{10\text{ mm}}{\text{g}}}$$

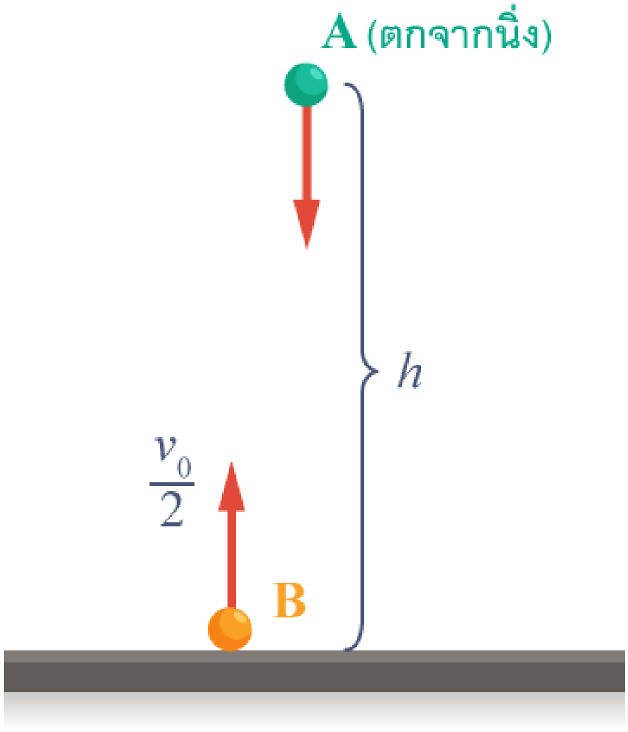
ดังนั้น ระยะทางในแนวดิ่งที่กระสุนใช้เวลา t ในการเคลื่อนที่คือ

$$S_y = 0 + \frac{1}{2}g \cdot \left(2\sqrt{\frac{10\text{ mm}}{g}}\right)^2 = 20\text{ mm}$$

เป็นระยะที่กระสุนปืนกระทบเป้าใต้แนวการยิง

ข้อที่ 13

ตอบ ทันกันที่พื้นพอดี



เราหาความสูง h ที่ A ขึ้นไปได้จาก

$$\begin{aligned} v_f^2 &= v_i^2 + 2as \\ 0^2 &= v_o^2 + 2(-g)h \\ h &= v_o^2/2g \\ \text{และ}(\text{ระยะที่}A\text{ตกลงมา}) + (\text{ระยะที่}B\text{ขึ้นไป}) &= h \end{aligned}$$

จะได้

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}gT^2 + \left(\frac{v_o}{2}T - \frac{1}{2}gT^2\right) &= h \\ T &= \frac{2h}{v_o} \\ &= \frac{v_o}{g} \end{aligned}$$

เป็นเวลาที่ชนกันพอดี
ดังนั้นชนกันที่ความสูง

$$h - S_A = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = 0$$

$\therefore$ ทันกันที่พื้นพอดี

ข้อที่ 14

ตอบ

1) $15.8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

2) $6.24\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

3) $6.55\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

รู้ $u = 0 \text{ m/s}, a = 2.00\frac{m}{s^2}, s = \frac{2\pi r}{4}, v = v$
แทนค่า

$$\begin{aligned} v^2 &= u^2 + 2as \\ v^2 &= 0^2 + 2(2.00)(\frac{2\pi \times 40.0}{4}) \\ v &= \sqrt{80.0\pi} \\ v &= 15.8\frac{m}{s} \end{aligned}$$

กำลังแล่นไปทางทิศตะวันออก

$$\begin{aligned} a_c &= \frac{v^2}{R} \\ &= \frac{15.8^2}{40.0} \\ &= 6.24\frac{m}{s^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{a_c^2 + a_T^2} \\ &= \sqrt{6.24^2 + 2.00^2} \\ &= 6.55\frac{m}{s^2} \end{aligned}$$

ข้อที่ 15

ตอบ 0.747 m

<u>เขียนสมการ เส้นแนวเดิน</u>

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}gt^2 \\ x &= ut \end{aligned}$$

รวมสมการกำจัด t ได้

$$y = -\frac{g}{2u^2}x^2$$

เป็นพาราโบลาคว่ำ จุดยอดอยู่ที่ $(0,0)$ จากรูปแต่ละขั้นสูง $0.25 \quad \text{m}$ กว้าง $0.2 \quad \text{m}$ กำหนดให้ ทิศชี้ลงเป็นบวก ลบเพื่อกำจัด ค่าลบแล้วย้ายข้าง

$$\sqrt{\frac{2u^2y}{g}} = x \ \ldots\ldots\ldots(1)$$

<u>หาขั้นที่ลูกบอลไปชนครั้งแรก</u>
กำหนดค่า $y = 0.25n$, $x = 0.2n$โดยที่ n คืออันดับของขั้นบันไดเริ่มนับจากจุดเริ่มยิง

แทนค่า $u = 1.4$, $g = 9.8$ ค่า x และy ลงไปจัดรูปทำให้เขียนอสมการเงื่อนไขได้ว่า

$$\sqrt{\frac{2(1.4)^2 0.25n}{9.8}} < 0.2n$$
$$\sqrt{\frac{n}{10}} < 0.2n$$

จะได้เงื่อนไข ของขั้นที่พบความน่าจะเป็นในการถูกกระเด้งโดนคือ $2.5 < n$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก
ดังนั้น ขั้นที่ลูกบอลตกครั้งแรก คือ จำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่ทำให้อสมการดังกล่าวเป็นจริง
นั่นคือ 3 จะได้ว่าลูกบอลเด้งที่ขั้นที่ 3 ครั้งแรก
แทน $y = 3(0.25)$ ในสมการ (1) เพื่อหาระยะห่างแนวแกน x จากจุด $(0, 0)$ ที่ขั้นที่ 3 จะได้

$$1.4\sqrt{\frac{1.5}{9.8}} = x$$

นำผลที่ให้มาจากโจทย์ แทนค่า

$$1.4 \times 0.391 = 0.547$$

ดังนั้น ห่างจากกำแพงเท่ากับ

$$0.20 + 0.574 = 0.747 \ \text{m}$$